МАТЕМАТИКА И ЛОГИКА В ШКОЛЕ

Д. Д. Мордухай-Болтовской (Ростов-на-Дону)

1. В методической литературе очень много писали против строгой формально-логической геометрии в школе. И, конечно, нет сомнения, как бы ни были интересны итальянские учебники[1]), они не годятся для лиц юношеского возраста. Но не следует перегибать и в другую сторону. Такой перегиб имеется у Бореля[2]). Его учебник насыщен идеями, но он, внося слишком много интуиции, уже перестает быть школой логического мышления. Между тем лучшей такой школой является именно геометрия. Человек, прошедший через изучение геометрических доказательств, даже если он уже успел забыть геометрию, всегда будет лучше мыслить, чем тот, который ее совсем не видел.

Но прибавлю еще следующее: геометрия является школой не только логического мышления, но и школой логики. Нет сомнения, что для того, чтобы вполне усвоить геометрию, следует знать и логику. Я не буду сейчас исследовать какую. Одно только ясно: такую, которая имеет дело с теми общими схемами определений и выводов, которыми пользуется математика.

Такое явление, которое мне пришлось наблюдать, когда из 60 слушателей ни один не знал, что такое силлогизм,— явление уже совершенно ненормальное.

В пединституте мною одно время читался курс: элементарная математика с точки зрения высшей. Но такая высшая точка зрения совершенно невозможна при незнании логики, так как она, конечно, требует и более глубокого аксиоматического изучения, предполагающего знание терминологии и общих понятий классической логики, на которой выросла аксиоматика. Я сейчас не намерен ни защищать аксиоматическое направление в науке, ни строить программу логики в чисто формальном, психологическом или каком-либо другом направлении. Для меня ясно только то, что учащийся физкультуре может, пожалуй, и не знать анатомии, но хороший учитель физкультуры ее должен знать, хотя бы

[1]) Итальянские учебники: A. Sannio ed E. d'Ovidio, Elementi di Geometria, Napoli 1916; G. Veronese, Elementi di Geometria, Padova 1911; также Enriques ed Amaldi, Ingrami, Paolis etc.

[2]) Борель-Штеккель, Элементарная математика, изд. „Матезис".

в общих чертах. То же, конечно, относится и к учащемуся математике и учителю ее. Последний во всяком случае должен за геометрическим выводом видеть скелет логического аппарата. В настоящей статье я намерен побеседовать о некоторых пунктах методики математики (преимущественно геометрии), имеющих значение в этом отношении.

СУЖДЕНИЯ

2. Прежде всего я отмечаю школьную проблему об определениях[1]). Она имеет гораздо большее значение в школе, чем это может показаться, если встать на точку зрения научного исследователя. В следующей статье я предполагаю рассмотреть вопрос о некоторых новых геометрических определениях. Сейчас же ограничусь только задачей об общем характере школьного определения.

Взгляд на всякое математическое определение, как на определение номинальное, т. е. на соглашение, выясняющее точный смысл некоторого слова, выражения или символа, какой мы ему приписываем, совершенно неправилен, поскольку речь идет о школьном определении[2]).

С этой точки зрения определение не имеет никакого воспитательного значения, оно только необходимый баласт для памяти и больше ничего. Наряду с определениями номинальными следует признать и генетические, отнюдь к ним не сводимые, и учащийся должен осознать эту несводимость.

Что такое, например, окружность?

Геометрическое место точек, отстоящих на одно и то же расстояние от некоторой точки.

В номинальном определении мы означаем некоторым термином совокупность свойств, которые присущи объектам некоторого класса, означая термином (прилагательным) вид, охарактеризованный этими свойствами. Треугольник, имеющий равные стороны,—равносторонний. Это, конечно, номинальное определение[3]).

Но приведенное выше определение окружности иного рода. Окружность, конечно, не есть совокупность точек, обладающих указанным выше свойством. Тут нет только одного выделения вида множества точек. Здесь круг определяется, как носитель некоторой бесконечной совокупности точек, т. е. пунктуала.

---

[1]) См. Bonnel, Essai sur les définitions géométriques, 1870. Liard, Des définitions géometriques et de définitions empiriques, Paris 1883.

Богатый материал в прекрасной книге Schotten, Inhalt und Methoden des planimetrischen Unterrichts, 1870.

[2]) О номинальных и генетических определениях см. знаменитую порт-рояльскую логику, принадлежащую Арно и Николю,—„L'art de penser", Paris 1684.

[3]) Об определении см. Petri, Rami, Geometri Basileae Scholarum Mathem. libri unus et triginta. Аристотелевские взгляды см. Aristoteles, Anal. Post., lib. 1, стр. 13. См. также (Triedlein) Procli Diadochi, In Primum librum Euclidis elementorum Commentarium, Leipzig 1873.

Но что такое носитель, в каком взаимоотношении находятся кривая и пунктуал, который несет кривая, — это уже не дается определением. В этом определении, как и в других генетических определениях, содержится интуитивный скачок от производителя точки) к носителю (кривой).

Но мы, конечно, не нарушим правильности наших логических заключений, отожествив окружность и прямую с пунктуалами, которые они несут.

Верно и то, что пунктуал второго порядка (в частности, окружность) и прямая имеют не более двух общих точек, верно и то, что круг и прямая пересекаются в двух точках; но все же это — по существу два различные положения, хотя и эквивалентные, т. е. друг из друга вытекающие на основании того, что пунктуал определяет круг и, обратно, круг определяется пунктуалом.

Из того, что о системе объектов:

$$A,\ B,\ C,\ D, \ldots,$$

мы говорим то же, что о системе:

$$A',\ B',\ C',\ D', \ldots,$$

вовсе не следует тожественность этих систем объектов, ибо в них может быть нечто, о чем мы именно не говорим, а иногда даже ничего и не можем сказать так, как от нас это требуется, т. е. в логических терминах.

Если мы заинтересованы только в том, чтобы высказать в определенных терминах ряд теорем, то мы можем бесцеремонно подставлять вместо $A, B, C, D, \ldots$, соответственно $A', B', C', D', \ldots$, т. е. подставлять вместо определенных объектов то, что можно назвать их логическими эквивалентами.

В этом случае мы можем определять с помощью постулатов или, вернее, совсем уничтожить определения и ограничиваться лишь постулатами, на которые можно взирать, как на условности. Но это — точка зрения формально-гипотетической науки и ей не место в школе.

Учащийся должен знать то, о чем он будет говорить, уметь дать чертеж и передать словами то, что выражает чертеж.

3. В определения строго-логической системы геометрии желательно внести минимум признаков определяемых объектов, и затем необходимо доказать совместность этих признаков. Но в элементарном курсе такие требования неуместны.

Совместность признаков часто просто подтверждается интуицией данного объекта рассматриваемого типа. Также нет необходимости всегда стремиться к независимости определенных признаков, т. е. к их минимуму[1]). Определение должно иметь

[1]) О требованиях, предъявляемых логикой к определениям, см. Челпанов, Учебник логики, гл. VI, стр. 31, Москва 1913.

больше всего воспитательное значение. В то время как развертывание доказательств упражняет способность к логическим умозаключениям, определения развивают наблюдательность, способность к расчленению необходимого материала и умение выражать результаты анализа на словах.

В определения элементарного курса геометрии не только могут, но и должны входить логически не действующие признаки.

Более того, с педагогической точки зрения лучше всего постепенно доводить учащегося до такого определения, которое бы содержало не только те признаки, по которым определенные объекты распознаются в донаучном мышлении и которые вместе с тем логически недостаточны, но и другие, уже приводящие логический аппарат в движение, и путем примеров, говорящих интуиции, вызвать их в сознании учащегося.

Например, идею или даже просто „чувство“ подобия мы имели еще раньше, чем приступили к изучению геометрии.

Мы можем формулировать определение подобия так, что не пойдем в разрез с этим чувством: „Две фигуры подобны, если они имеют одну и ту же форму, но различные размеры“.

Но такое определение не приведет в движение логический аппарат, если не присоединить сюда в форме аксиомы (как это делает Вольф) аксиому, относящуюся к таким фигурам, обычно у нас превращаемую в определение (равенство углов)[1]).

4. Независимо от того, возможно ли, как это утверждают, чисто логические определения геометрических объектов и извлечения из них всего содержания геометрии, в полуинтуитивной школьной геометрии должны существовать суждения, приносящие нечто, не содержащееся в самых определениях.

Такие суждения названы Кантом[2]) синтетическими в противоположность аналитическим, не дающим ничего сверх того, что содержится уже в определении. Последние только расчленяют то, что образует исследуемый объект, в то время как первые присоединяют к признакам, определяющим объект, нечто новое, расширяющее наше знание о нем.

Учитель, конечно, всегда должен уметь различить синтетическое определение от аналитического, суметь распознать как то, что входило в определение, так и то, что получено путем рассуждений или обращением к интуиции.

Спросите ученика: доказывается ли, что квадрат имеет прямой угол.

Он должен ответить: нет, так как квадрат определяется, как вид прямоугольника, а именно прямоугольника с равными сторонами, а прямоугольник определяется, как параллелограм с прямыми углами. Это — суждение, конечно, аналитическое.

---

[1]) Теория подобия Вольфа: Wolf, Compendium elem. Mathexos. Venetils 1713. См. Мордухай-Болтовской, Теория подобия Христиана Вольфа и постулат де-Левека, Журнал опытной физики и элементарной математики, 1916.

[2]) Кант, Критика чистого разума, эстетика, перевод Лосского.

Разность между двумя следующими друг за другом членами арифметической прогрессии постоянна. Это, — конечно, тоже суждение аналитическое.

Но вот суждение синтетическое: диагонали прямоугольника равны. Это свойство не заключается в определении прямоугольника. Фрейер [1]) отождествляет аналитическое суждение с категорическим, а синтетическое с гипотетическим. Тогда все данные новые положения следует признать гипотетическими.

Если A есть B, то C есть D.

Если параллелограм — прямоугольник (т. е. если один из его углов прямой), то диагонали равны.

Но с этим нельзя согласиться. Это можно было бы утверждать только в том случае, если бы вопрос о том, может ли иметь параллелограм прямые углы, оставался бы открытым.

Но союз „если" здесь употребляется в ином смысле, чем тот, который требуется синтетическим суждением, а именно, в смысле определения вида подлежащего с помощью рода и специфической разности.

Гипотетические же суждения в собственном смысле состоят не в формулировке теорем, а в промежуточных ступенях ее доказательства. Доказывается, например, равенство двух треугольников при трех равных сторонах.

„Если при наложении треугольника $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC A_1 упадет вне треугольника ABC, то произойдет „то-то". Вот это типичное гипотетическое суждение. Пока неизвестно, может ли A_1 попасть вне треугольника ABC. Только последующий ход рассуждений убеждает в том, что это невозможно так же, как и то, что A_1 окажется внутри — в результате точка A_1 должна оказаться на треугольнике ABC в точке A.

5. Разделительное суждение. Суждение вида:

$$A \text{ есть или } B, \text{ или } C, \text{ или } D,$$

тоже чаще является в доказательстве, чем в формулировке.

Пример теоремы с таким суждением: два трехгранных угла с равными плоскими углами или симметричны или равны (лучше сказать конгруэнтны).

В элементарной математике обычно имеют место трихотомные разделительные определения.

Например:

1) Окружность или пересекает прямую, или касается ее, или не имеет с ней общей точки.

2) Радикальная ось есть или общая хорда двух кругов, или общая их касательная, или, наконец, лежит вне кругов и требует особого построения.

3) Тангенс острого угла или меньше, или равен, или больше единицы.

---

[1]) Freier, Beispiele zur Logik aus der Mathematik und Physik, Berlin 1889.

4) Квадратное уравнение имеет или два комплексных корня, или два равных вещественных, или два различных вещественных.

Такие разделительные суждения имеют очень большое воспитательное значение.

Они воспитывают в ученике способность к рефлексии и к анализу. Они учат внимательности, учат тому, чтобы не пропускалась ни одна из возможностей.

Преподаватель глубоко ошибается, думая, что прежде всего он должен воспитать быстроту соображения. Быстрота эта имеет меньшее значение, чем точность и осторожность мышления. Лучше мыслить медленно и верно, чем скоро и ошибочно. Над чрезмерным увлечением умственным счетом методисту следует призадуматься.

6. Деление суждений на категорические, условные и разделительные совершается по отношению между подлежащим и сказуемым (субъектом и предикатом).

Но есть еще деление суждений по качеству и количеству на общеутвердительные и частноутвердительные, общеотрицательные и частноотрицательные.

Отрицательное суждение обычно встречается тоже только как промежуточное в ходе доказательств. Но чем больше математика удаляется от естествознания, для которого она является лишь вспомогательной наукой, и приближается к сфере чисто математических идей, так сказать, самих себе довлеющих, тем большую ценность получает отрицательное суждение.

Для техника всегда необходим положительный результат: для него, например, важно построить с помощью циркуля и линейки проходящую через точку M прямую MB с отрезком AB между двумя пересекающимися прямыми PA и PB, равным данному.

Но математика вскрывает, что в самом требовании задачи заключено противоречие, что такая задача не может быть решена с помощью только циркуля и линейки [1]), что для этого необходим еще другой инструмент (например, вычерчивающий конхоиду).

Построение порой очень сложных доказательств невозможности технику всегда будет представляться напрасной затратой энергии. Но учащийся не должен пройти совершенно мимо таких суждений.

Квадратура круга [2]) и трисекция угла будут всегда интересовать лучших учеников. Молодой ум будет колебаться между неверием в силу разума и верой в его бесконечную мощь. Следует удержать его от крайностей, следует указать на существование неразрешимых проблем.

---

[1]) Klein Leçons sur certaines questions de géométrie élémentaire, 1896.

[2]) «О квадратуре круга», изд. ГТТИ, 1934. Beutel, Die Quadratur des Kreises, Leipzig 1920. Montucli, Histoire des recherches sur les quadratures, 1754

В элементарной геометрии теорем отрицательного характера очень мало по причине сложности тех логических операций, с помощью которых они устанавливаются.

Стереометрическая теорема: „не существует более пяти правильных тел", очень важная и интересная, далеко не всегда служит предметом изучения в средней школе. Между тем здесь налицо та форма отрицательного положения, которая может иметь наибольшее положительное значение, а именно — точно устанавливается число решений поставленной проблемы. Находится и решение и добавочно доказывается, что других быть не может.

7. Обучение должно итти на „да" и на „нет", но только едва ли можно признать рациональной следующую постановку обучения с помощью отрицательных суждений со стороны ученика. Ученику предлагается задача-ловушка с кроющимся в задаче противоречием. Он сам должен найтись и понять, что учитель его дурачит. По своей природе человеческий ум, а в особенности ум ребенка, очень доверчив, он меньше всего имеет склонность отнестись критически к самому заданию. Он всегда верит, что не только та задача, которую предлагает ему учитель, но даже и та, которую он сам себе ставит, допускает решение.

Поэтому учителю лучше вопрос ставить так: допускает ли данная задача решение, или нет, и в том случае, если допускает, найти решение.

Так: можно ли через точку пересечения двух кругов C_1 и C_2 провести касательную к третьему кругу C и, если можно, то провести ее.

Вопросник, с помощью которого велись бы повторения не доказательств, но основных результатов геометрии, должен содержать и вопросы, на которые должны быть даны отрицательные ответы, и ученик должен последние мотивировать.

Может ли в прямоугольном треугольнике медиана, опущенная на гипотенузу, совпасть с высотой? Отв.: Может.

В каком случае? Отв.: Когда в прямоугольном треугольнике катеты равны.

Может ли в прямоугольном треугольнике медиана, опущенная на катет, совпасть с высотой? Отв.: Нет, ибо она совпала бы с катетом, т. е. с одной из сторон, которая, конечно, не может быть медианой.

Может ли эта медиана совпасть с биссектрисой? Отв.: Нет, так как в силу теоремы относительно отсекаемых на стороне отрезков, это предполагало бы равенство катета и гипотенузы.

Может ли куб пересекаться плоскостью по шестиугольнику? Отв. Да.

А по восьмиугольнику? Отв.: Нет, ибо это предполагало бы у куба не шесть, а восемь граней.

Только один математик-методист старого времени Сюзанн[1]) обратил внимание на „отрицательные упражнения", которые на мой взгляд могут иметь методическое значение, воспитывая сноровку в нахождении ошибок как в ходе логических рассуждений, так и в вычислениях.

8. Частноутвердительное суждение. Частноутвердительное суждение „некоторые S суть P" и частноотрицательное „некоторые S не суть P" — относятся к низшей ступени эволюции математической мысли.

Предположением „некоторые S суть P" вызывается вопрос: какие же S суть P; оно требует общеутвердительного суждения „все S_1 суть P", где S_1 есть вид, входящий в род S.

Доказать, что некоторые S суть P математика может, только доказав, что все S_1 суть P, так что в логически отделанной системе частноутвердительное и частноотрицательное суждения являются только после общеутвердительных A и общеотрицательных E. Поэтому в окончательной научной обработке частноутвердительное и частноотрицательное суждения не имеют значения.

Но они имеют значение на тех ступенях математического мышления, когда положения еще не доказаны, но подозреваются.

Так можно подозревать, что некоторые, но неизвестно точно какие, задачи на построение не разрешимы с помощью циркуля и линейки, и сделать отсюда заключение, что не все уравнения разрешимы в квадратных радикалах.

В силу этого частноутвердительные и частноотрицательные суждения имеют и методическое значение.

При обучении алгебре необходимо привести ученика к мысли, что не все задачи разрешаются с помощью системы уравнений первой степени, что не всегда системы уравнений являются совместными, что в некоторых случаях одно является следствием других или им противоречит и т. д.

Различные „методы" решения задач элементарной геометрии, в особенности задач на построение, никогда не бьют наверняка, т. е. не всегда имеют успех и, таким образом, рекомендуя их, приходится высказать только частноутвердительное суждение о том, что в некоторых случаях следует ожидать успеха.

УМОЗАКЛЮЧЕНИЕ

9. Переходя от суждения к умозаключению, мы прежде всего должны поставить вопрос о методическом и научном значении индукции и дедукции в математике.

Индукция[2]), т. е. заключение от частного к общему, будет иметь различное методическое значение, смотря потому, будет ли

---

[1]) Suzanne, De la manière d'étudier es mathématiques, Paris 1810.

[2]) Милль, Система логики, перевод Ивановского.

это неполная индукция, т. е. распространение некоторого признака на весь класс, когда он наблюдается только у части индивидуумов, или же полная, т. е. подобное же заключение по установлению этого факта для всех индивидуумов. Следует помнить, что математика наука дедуктивная, она заключает не от частного к общему, а наоборот, от общего к частному, но сам математик, как всякий мыслитель, в своей закулисной работе пользуется индукцией, строя на основании ряда фактов возможную гипотезу, которая затем проверяется уже дедуктивными приемами, т. е. попытками вывести из нее положение уже от общего к частному. При этом, конечно, употребляется неполная индукция. Берутся отдельные случаи, а не вся совокупность, которую математик не может охватить.

Предположим, что математик занимается разложением целых чисел ва сумму квадратов. Для целого ряда, но, конечно, не для всех целых чисел он убеждается в разложимости на четыре квадрата. Он делает заключение по индукции, что каждое число разлагается на сумму четырех квадратов. Если бы число рассмотренных чисел было бы 10 тысяч, то, встав на точку зрения естествоиспытателя, можно было бы принять разложимость всякого числа на четыре квадрата, как факт, установленный громадным числом наблюдений. Но математик, начав, как естествоиспытатель, должен кончить уже, как математик, и отыскать дедуктивное доказательство своего положения.

В научном мемуаре ученый в праве скрыть свою индуктивную закулисную работу, но при обучении она должна быть на виду больше, чем это обычно делается.

Математическое образование имеет своей целью развить математическое мышление, но в последнее как элемент должна входить и индукция, и она должна также развиваться рядом упражнений. Неточная индукция таким образом имеет в математике не логическое, а эвристическое значение, а в силу этого и методическое.

Но я должен здесь удержаться от того увлечения психологизмом ученических работ, которое наблюдалось у преподавателей приблизительно около начала последней войны. Так называемый „анализ“ решения содержал объяснение ученика, почему он выбирает тот или другой путь решения предложенной задачи и, конечно, давал не логическую, а психологическую мотивировку. Такой психологический самоанализ определенным образом вредил работе. Ученик совершенно терял границу между логикой и психологией, и его психологическая мотивировка постепенно заменяла логическое доказательство. Конечно, в эту психологическую часть решения входила и неполная индукция, но в форме беспорядочной, не как строго систематизированный метод естествоиспытателя.

10. Полная индукция для конечного класса, вывод наличия какого-либо признака для всех индивидуумов или вывод свойства

класса по доказательству наличия признака для каждого из индивидуумов, с научной точки зрения представляет экономию мысли, но в редких случаях является необходимой, пожалуй, только в тех случаях, когда для каждого индивидуума или вида приходится строить особое доказательство. Большей же частью в математике выбираются доказательства, объемлющие все случаи и относящиеся не к индивидууму, а к классу, и, таким образом, несколько доказательств соединяются в одно.

С методической же точки зрения в целях избежания слишком общих понятий, труднее усваиваемых, чем им соподчиненные, лучше итти от частного к общему. И обычно так и поступают.

Обобщенную пифагорову теорему можно было бы доказать сразу для общего случая, введя понятие о знаке отрезка. Но лучше, конечно, рассматривать каждый случай в отдельности и для каждого случая (прямоугольного, тупоугольного и остроугольного треугольника) выводить свою формулу и уже затем, познакомив со знаком отрезка, объединить их одной формулой или же поступить, как в тригонометрии, придать этим теоремам тригонометрическую форму, что обычно и делается.

11. Когда класс бесконечен, т. е. содержит бесконечное число индивидуумов, то перечислить их уже невозможно.

В этом случае в современной математике употребляется следующий логический прием, совершенно чуждый античной мысли. Теорема доказывается для одного или вообще конечного числа индивидуумов.

Положим, что каждому индивидууму отвечает значение, принадлежащее к области

$$\Omega(a,\ b,\ c,\ldots).$$

Если мы докажем, что

1) теорема верна для $x=a$;

2) если она верна для одного значения x, то она верна и для другого x', получаемого известным образом из первого значения, или, как будем говорить, получаемого определенным преобразованием;

3) если от одного значения x ко всякому другому можно перейти путем такого преобразования, то мы утверждаем справедливость высказанной теоремы для всякого индивидуума данного класса.

В частном случае мы можем иметь так называемое счетное множество индивидуумов, иначе говоря, индивидуумы могут нумероваться. Тогда мы имеем тот принцип, который называется принципом полной математической индукции [1]).

---

[1]) О полной математической индукции, о ранней истории ее наибольшее значение имеют: Gr. Maurolico, Arithmeticae libri duo, Ven. 1557, 1577. Jacobi Bernoulli, Ars conjectandi, 1713, Opere I, 282—283. Pascal, Oeuvres, Paris 1908, т. III, стр. 456. См. Cantor, Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, т. III, стр. 341. Vacca, Sur le principe d'induction mathématique, Revue de Métaphys., стр. 30, 1911.

Тогда индивидуумы располагаются по порядку соответственно целым числам, их характеризующим (их номерам): $n = 1, 2, 3\ldots$

1) Теорема доказывается для $n = 1$.

2) Доказывается, что если она верна для одного значения n, то верна и для значения n на единицу большего. Здесь следует отметить необходимость с методической точки зрения рассмотрения не одного, а нескольких значений, раньше чем перейти ко второму моменту указанной выше операции.

Теорема, конечно, вполне доказана, если ограничиться случаем $n = 1$, но тогда эвристический момент совершенно затушевывается.

Ученик сперва должен быть приведен к положению путем неполной индукции, как естествоиспытатель. Затем он должен осознать, что он математик, и, поняв принцип полной индукции с его точной формулировкой (начиная с $n = 1$), внести необходимый корректив, т. е. доказать, что положение, будучи верно для n, верно и для $n + 1$.

Применение этого принципа мы находим в кестнеровском[1]) доказательстве формулы бинома Ньютона.

Формула эта обнаруживается для

$$n = 1, 2, 3$$

с помощью простого умножения

$$\begin{aligned} a + b &= a + b, \\ (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2, \\ (a + b)^3 &= (a + b)^2(a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3, \end{aligned}$$

а затем доказывается путем умножения

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \frac{n}{1}ab^{n-1} + b^n$$

на $(a + b)$, что если формула верна для n, то она верна и для $n + 1$.

Возвращаясь к высказанной выше наиболее общей форме принципа полной математической индукции, мы можем подвести под нее и доказательство геометрических теорем с помощью преобразования. Элементарная математика скрытым образом оперирует с подобным преобразованием, изучая то, что остается при нем неизменным, т. е. инварианты.

Отметим схему: задано найти x для объекта A, принадлежащего классу Ω.

A преобразуется в другой более простой объект $\overline{A}$ того же класса Ω и для $\overline{A}$ имеется x.

Доказывается, что при этом преобразовании x есть инвариант и таким образом решение x будет решением не только для $\overline{A}$, но и для A. Эта схема может быть показана ученику, например, в случае нахождения площади параллелограма путем известного

---

[1]) Kästner, Anal. d. endlichen Grösse, См. Freier, стр. 35.

преобразования его в прямоугольник, площадь которого легко находится.

12. В то время как индукция ведет от нескольких индивидуумов ко всему классу, аналогия ведет от одного индивидуума к другому, признанному подобным первому.

A присущи признаки:

$$a,\ b,\ c, \ldots$$

и для A доказано свойство ω.

У B находим те же признаки: $a,\ b,\ c, \ldots$ и на основании этого утверждаем, что ему присуще также свойство ω.

Здесь следует отметить тот случай, когда подобное заключение делается без анализа вывода такого свойства ω, которое доказывается на основе свойств A, не присущих уже B. Это будет та аналогия, которой мы и пользуемся в жизни, которой ученик имеет склонность пользоваться и в геометрии и которая вообще с методической точки зрения очень опасна, развивая в учащемся склонность к легкомысленным заключениям не из ряда фактов, а по первому взгляду. Иное дело, когда устанавливается, что ω выводится только из $a,\ b,\ c, \ldots$, что признаки, которыми A и B различаются, являются логически не действующими. Осознание логической эквивалентности объектов весьма важный момент при развитии более глубокого понимания геометрии.

Я не буду настаивать на этом глубоком проникновении в предмет для учащегося, но я буду настаивать на том, чтобы в некоторых случаях им вполне полагалась полная аналогия двух величин A, B относительно двух систем

$$a_1,\ a_2,\ a_3, \ldots,$$
$$b_1,\ b_2,\ b_3, \ldots,$$

из которых вытекает одинаковость выражения A через $a_1, a_2, a_3, \ldots$ и B через $b_1, b_2, b_3, \ldots$

Здесь следует упомянуть о круговой перестановке при получении системы формул.

Примером может служить формула для x, определяемая вместе с y системой уравнений первой степени:

$$\begin{aligned} a_1x + a_2y &= c, \\ b_1x + b_2y &= d. \end{aligned} \tag{1}$$

А именно

$$x = \frac{cb_2 - da_2}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Следует ли, найдя x, находить еще y? Я думаю, достаточно систему (1) переписать в виде

$$\begin{aligned} a_2y + a_1x &= c, \\ b_2y + b_1x &= d, \end{aligned} \tag{2}$$

чтобы увидеть, что когда y играет роль x, то a_2, b_2, a_1, b_1 играют соответственно роли a_1, b_1, a_2, b_2, т. е. в знаках происходит круговая перестановка и

$$y = \frac{cb_1 - da_1}{a_2b_1 - a_1b_2}.$$

13. Несколько слов о силлогизмах в математике. Мы вовсе не предлагаем по рецепту Дазиподия и других излагать доказательства, вкладывая их в силлогические схемы, подчеркивая большую и малую посылки и заключение. Но нет сомнения, без закрепления над моментами вывода схоластических ярлыков, ученик должен вполне ясно сознавать то, что сейчас дано в форме предположения, то, что раньше было выведено или вытекает из определений или аксиом и, наконец, то, что выводится. Что учащийся инстинктивно ищет таких схем для вывода, что ум его расчленяет вывод так, как этого требует если не силлогистическая, то другая, может быть более правильная схематика,—это можно видеть хотя бы из того, что он, развивая свои выводы символически, имеет знаки для вывода (означаемого в математической логике через $\supset$) и означает его иногда, смущая преподавателя, знаком равенства (=).

Силлогистические модусы не имеют большого значения для математики. Из того, что нами было сказано о частноутвердительном и частноотрицательном суждениях, следует, что из 19 модусов только 5, содержащих только A (общеутвердительное суждение) и E (общеотрицательное), имеют значение в математике. Это будут модусы:

I фигура.

$$\left.\begin{array}{c} MP \\ SM \\ \hline SP \end{array}\right| \text{ Barbara и Celarent,}$$

$$\text{т. е.}\ \begin{array}{r|r} \text{все } M \text{ суть } P & \text{ни одно } M \text{ не } P \\ \text{все } S \text{ суть } M & \text{все } S \text{ суть } M \\ \hline \text{все } S \text{ суть } P & \text{ни одно } S \text{ не } P \end{array}.$$

II фигура.

$$\left.\begin{array}{c} PM \\ SM \\ \hline SP \end{array}\right| \text{ Cesare и Camestres:}$$

$$\begin{array}{c|c} \text{ни одно } P \text{ не } M & \text{все } P \text{ суть } M \\ \text{все } S \text{ суть } M & \text{ни одно } S \text{ не } M \\ \hline \text{ни одно } S \text{ не } P & \text{ни одно } S \text{ не } P \end{array}.$$

III фигура.

$$\left.\begin{array}{c} PM \\ MS \\ \hline SP \end{array}\right| \text{ Camene:}$$

$$\begin{array}{c} \text{все } P \text{ суть } M \\ \text{ни одно } M \text{ не } S \\ \hline \text{ни одно } S \text{ не } P \end{array}.$$

14. Учащийся должен ясно представлять родословное дерево геометрии. Было бы полезно для ученика построить хотя бы в начале геометрии нижнюю его часть, подымающуюся от определений и аксиом. Неважно, что некоторые корни остаются не обозначенными и ветвей больше, чем думает ученик, а может быть и учитель. Этим родословным деревом, логической цепью связующей теоремы, в школе слишком мало интересуются.

Вся геометрия представляется какими-то отрывками, которые быстро вылетают из памяти. Я не встречал ученика, который бы ясно понимал, почему приходится дважды обращаться к внешнему углу треугольника, сперва доказывая, что он больше внутреннего с ним не смежного, а потом то, что он равен сумме внутренних углов. Важный момент введения аксиомы о параллельных должен быть подчеркнут не для того, чтобы затем перейти к неэвклидовой геометрии, совершенно не годящейся для школы, а для того, чтобы выяснить эту логическую структуру геометрии, чтобы представить геометрию не как конгломерат теорем, а как систему.

Я отмечу здесь всеми признаваемую важную связь между логикой и математикой, которую должен знать, если не ученик, то во всяком случае учитель. Логика, как тоже наука дедуктивная, выводящая из некоторой системы логических постулатов различные логические положения, может сплести часть своей сети друг с другом связанных положений с сетью положений чистой математики.

Некоторые математические положения будут выводиться из положений математических и положений чисто логических, относящихся к столь общим понятиям, что под них могут подводиться как математические, так и нематематические.

Собственно говоря, логические положения, а именно, основные логические аксиомы (например, аксиомы тождества, противоречия, исключенного третьего), на которых зиждется силлогистика, входят всегда наряду с частноматематическими аксиомами в логическое построение математики.

Но в иных случаях мы имеем гораздо больше: в ряд умозаключений вводится чисто логическая теорема, которая доказуется в чистой логике.

15. Примером можно выставить доказательство некоторых обратных теорем в геометрии с помощью теоремы Гаубера[1]), о которой обычно не подозревает не только ученик, но и учитель. Эта теорема состоит в следующем. Если установлено несколько теорем, условия которых

$$H, \ H', \ H'', \ldots$$

обнимают все возможные случаи, и заключения которых

$$C, \ C', \ C'', \ldots$$

несовместны, то все обратные теоремы верны: из C следует H из C' — H', из C'' — H'', ... и т. д.

---

[1]) Hauber, Chrestomatie Geometriae.

Доказательство. Предположим, что при C не имеет места H; тогда должны иметь место H', H''..., ибо это по условию нашему единственно возможные гипотезы. Но если выполнено H', то из этого предположения следует C', так что рядом с C имеет место и C', но это в силу несовместимости C и C' быть не может.

Этот принцип применим к доказательству теорем и экономизирует деятельность логического аппарата.

Конечно, в силу своей абстрактности теорема Гаубера едва ли может быть изложена на уроке до доказательства с помощью „трех гипотез", выражаемых в частных конкретных формах. Ее следует излагать потом, когда ученик вполне усвоит эти доказательства и уловит сам общий их скелет.

В качестве примера можно привести следующие **трихотомии**.

Требуется угол AMB вписать в круг.

Если точка N лежит на окружности, то угол ANB, с вершиной в N, опирающийся на дугу AB, равен углу AMB;

если N внутри круга, то больше,

если N вне круга, то меньше.

Здесь H—точка N на окружности:

H'—внутри и

H''—вне круга.

Кроме этих случаев других быть не может. С другой стороны: C (равно), C' (больше), C'' (меньше) исключают друг друга.

Ссылаясь на теорему Гаубера, можем обратить все эти положения и получить обратную трихотомию.

Если $\angle ANB = \angle AMB$, то точка N лежит на окружности, описанной около AMB. Если $\angle ANB > \angle AMB$, то внутри; если $\angle ANB < \angle AMB$, то вне.

Теорема о том, что биссектриса равнобедренного треугольника (abc) совпадает с высотой, обращается на основании теоремы Гаубера в следующую трихотомию:

если $\angle acd > \angle bcd$, то $\angle adc < R$ (прямого угла),
если $\angle acd = \angle bcd$, то $\angle adc = R$,
если $\angle acd < \angle bcd$, то $\angle adc > R$.

Взяв другие C, C', C'', именно:

$$ad > bd,\quad ad = bd,\quad ad < bc,$$

получаем в равнобедренном треугольнике совпадение биссектрисы с медианой; на основании теоремы Гаубера получаем обратную теорему.

16. Мы упомянем еще другую теорему, которая, конечно, представляет значительно менее интереса, но с которой связывается понятие о противоположных и обратных теоремах, не всегда уясняемое учениками.

Из четырех положений

1) A есть B, 2) B есть A,
3) не A не есть B, 4) не B не есть A,

т. е. данного обратного данному, противоположного данному и противоположного обратному, каждые два влекут за собой остальные два,

Например 1) и 3) влекут 2) и 4), ибо если бы оказалось B не A, то так как не A не есть B, то оно есть B, что было бы противно закону противоречия. Можно эти четыре положения заменить следующими:

1) если A, то B; 2) если B, то A;
3) если не A, то не B; 4) если не B, то не A.

В этой форме мы имеем B как условие необходимое 1) и как условие достаточное 2) для A; не B как условие необходимое 3) и условие достаточное 4) для не A.

Надо сознаться, что если ученик часто неясно представляет сущность обратной теоремы, то условия, необходимые и достаточные, он постоянно путает.

В сущности он проходит через те же ошибки, через которые проходило человечество. История науки указывает целый ряд ошибок от обращения положений и принятия условий достаточных за необходимые.

Я приведу следующий пример такой четверки теорем:

1) если треугольник прямоугольный, т. е. если

$$\angle A = R,$$

то сумма квадратов катетов равняется квадрату гипотенузы

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2;$$

2) если $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$, то $\angle A = R$;
3) если $\angle A \gtreqless R$, то $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \gtreqless \overline{BC}^2$;
4) если $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 \gtreqless \overline{BC}^2$, то $\angle A \gtreqless R$.

На теорему 2), т. е. теорему, обратную теореме Пифагора, обычно не обращают внимания, между тем как именно она, а не сама теорема Пифагора, имела важное значение, лежа в основе так называемого правила веревки у египтян. Треугольник со сторонами такими, что $a^2 = b^2 + c^2$ (например, 5, 4, 3), давал возможность строить прямой угол.